Beklenen Değer Nedir? – Karar Vermenin Matematiği!

Çizgeler

6 Nisan 2025

https://youtu.be/MI6QRNnYr20

Alıştırmalar

1. Aşağıdakilerden hangisi "beklenen parasal değeri" en iyi tanımlar?

   a. Aynı seçeneği tekrar tekrar uzun süre seçersen kazanmayı bekleyebileceğin miktar.

   b. Kazanmayı/kaybetmeyi beklediğin miktar.

   c. Aynı seçeneği tekrar tekrar seçersen, her seferinde kazanmayı/kaybetmeyi beklediğin ortalama miktar.

   d. Bir işletmenin bir mali yılda beklediği kâr miktarı.

2. Oynaması \$100 olan ve \$500 ödeme ihtimali 1/25 olan bir slot makinesinin beklenen parasal değeri nedir? (Geri kalan durumlarda hiçbir şey ödemiyor.)

3. Bir slot makinesi her 50 oyundan birinde \$25 ödüyor ve oynaması \$1.
   Bir video poker makinesi her 20 oyunda birinde \$10 ödüyor ve oynaması \$2.
   Beklenen parasal değer açısından hangi makine daha iyi bir seçimdir?

4. Telefonuna yeni bir oyun indirmeyi düşünüyorsun. Oyun \$0,99.
   Ama bir promosyon var: İlk 50.000 kişi adil bir çekilişe katılacak. Ödül: \$10.000 nakit.

   Eğer bu ilk 50.000 kişi içinde olduğunu biliyorsan, bu oyunu indirmenin beklenen parasal değeri nedir?

5. Yerel bir kumarhane, oynaması \$2 olan bir oyun sunuyor. Adil bir yazı tura (yani %50-%50) en fazla üç kez atılıyor. Ödül kuralları şöyle:

- İlk atışta yazı gelirse $2 kazanırsın ve oyun biter.
- İlk atışta tura, ikinci atışta yazı gelirse $4 kazanırsın ve oyun biter.
- İlk iki atışta tura, üçüncüde yazı gelirse $8 kazanırsın ve oyun biter.
- Üç atışta da tura gelirse $0 kazanırsın.

Bu oyunun beklenen parasal değeri nedir?

6. Şu ifade ne zaman doğrudur:
"Bir kumar oyununun beklenen değeri, aynı zamanda o oyunun olası kazançlarından biridir."

   a. Her zaman doğru

   b. Bazen doğru

   c. Asla doğru değil

7. Diyelim ki bir yarışta sadece iki köpek var:
Santa's Little Helper ve She's the Fastest.

   - Santa's Little Helper'a bahis yaparsan ve kazanırsa $5 alırsın, kaybederse $2 kaybedersin.
   - She's the Fastest'e bahis yaparsan ve kaybederse $10 kaybedersin.
   - İki köpeğin kazanma şansı eşit.

   She's the Fastest kazanırsa, onun üzerine yapılan bahsin kazanç miktarı ne olmalı ki bu bahis daha iyi bir seçim olsun?

8. Diyelim ki hükümet, Zika virüsü salgınını önlemek için bir aşı programı oluşturup oluşturmamaya karar veriyor.
Eğer bir salgın çıkarsa, bu ülkeye 1000 milyon dolar (tedavi, iş gücü kaybı vb.) maliyete neden olacak.
Aşı programını uygulamak ise 40 milyon dolara mal olacak.

   - Eğer program yapılmazsa, salgın çıkma ihtimali 9/10.
   - Eğer program yapılırsa, salgın çıkma ihtimali hâlâ 1/10.

   a. 2 satır $\times$ 2 sütunluk bir tablo çiz.

- Satırlar: uygulama, uygulamama (aşı programı var/yok).
- Sütunlar: salgın, salgın yok.
- Her hücreye hem maliyet hem de olasılığı yaz.

b. Aşı programını uygulamanın beklenen parasal değeri nedir?

c. Aşı programını uygulamamanın beklenen parasal değeri nedir?

d. Hükümet, kararını beklenen parasal değere göre veriyorsa, programı uygular mı, uygulamaz mı?

9. Diyelim ki Ontario hükümeti yeni bir vergi getirip getirmemeye karar veriyor.
Eğer vergi getirilirse, bu devlet için 700 milyon dolar gelir sağlayacak. Ama bu durum ekonomiye zarar da verebilir. Ekonomiye zarar verme olasılığı düşük: sadece 1/5. Ancak böyle bir zarar olursa, 1,2 milyon dolarlık bir gelir kaybına neden olur.
($700 milyonluk vergi geliri yine de alınır ama bu zarar onu kısmen dengeler.)

Kazançları pozitif, kayıpları negatif olarak ele al.

a. Bu vergi uygulandığında, beklenen parasal değeri nedir?

Hükümet ayrıca, vergiyi getirip getirmemeye karar vermeden önce bir araştırma yapma seçeneğine de sahiptir.

- Eğer araştırma kötü haber verirse:
Ekonomiye zarar verme olasılığı aslında düşünülenin iki katı çıkar.
- Eğer araştırma iyi haber verirse:
Ekonomiye zarar verme olasılığı aslında düşünülenin yarısı kadar olur.

b. Diyelim ki hükümet araştırmayı yaptı ve sonuçlar iyi haber.
Bu durumda vergiyi uygulamanın beklenen parasal değeri nedir?

c. Araştırma yapıldı ve sonuçlar kötü haber çıktı.
Bu durumda vergiyi uygulamanın beklenen parasal değeri nedir?

d. Diyelim ki araştırmayı yapmak $5.000'a mal oluyor.
Hükümet bu araştırmayı yapar mı? Cevabınızı açıklayın.
(Not: Kararlarını beklenen parasal değeri maksimize etmek üzerine kurduklarını varsayın.)

10. Diyelim ki üniversiteniz harçları artırmayı düşünüyor.
Eğer artış gerçekleşirse, 7 milyon dolar gelir elde edilecek.

Ama bu durum üniversitenin itibarına zarar verebilir.
İtibara zarar gelme olasılığı: 3/5.

Zarar gerçekleşirse, bağış kaybı olarak 20 milyon dolar maliyet oluşur.
(7 milyon dolarlık harç geliri yine de alınır, bu da bu zararı kısmen dengeler.)

Kazançlar pozitif, kayıplar negatif olarak ele alınacaktır.

a. Harç artışının beklenen parasal değeri nedir?

   Üniversitenin, bu artış kararını vermeden önce bir araştırma yapma seçeneği de vardır.

- Eğer araştırma kötü haber verirse: itibara zarar gelme olasılığı 1/5 artar.
- Eğer araştırma iyi haber verirse: itibara zarar gelme olasılığı 1/5 azalır.

b. Araştırma yapılıyor ve sonuçlar iyi haber.
   Bu durumda harç artışının beklenen değeri ne olur?

c. Araştırma yapılıyor ve sonuçlar kötü haber.
   Bu durumda harç artışının beklenen değeri ne olur?

d. Araştırmayı yapmak 1000 dolara mal oluyor.
   Üniversite bu araştırmayı yapar mı?
   (Üniversitenin kararlarını beklenen değeri maksimize etmek üzerine verdiğini varsayın.)

11. Noree'nin biri $60 değerinde telefon, diğeri $240 değerinde tableti var.

- Telefonu değiştirmek zorunda kalma olasılığı (hasar/kayıp/hırsızlık): 1/5
- Tableti değiştirme olasılığı: 1/6

(Not: Bu olasılıklar bağımsız.)

$60'lık bir sigorta, her iki cihazın değişim maliyetini karşılıyor.

a. Bu sigortayı satın almanın beklenen parasal değeri nedir?

b. Bu sigortayı almamanın beklenen parasal değeri nedir?

12. William'ın biri $60 değerinde telefon, diğeri $540 değerinde tableti var.

- Telefonu değiştirme olasılığı: 1/3
- Tableti değiştirme olasılığı: 1/5
  (Bu olasılıklar birbirinden bağımsızdır.)

$100'lık bir sigorta, her iki cihazın değişim masrafını tamamen karşılar.

a. Sigortayı satın almanın beklenen parasal değeri nedir?

b. Sigortayı almamanın beklenen parasal değeri nedir?

13. Zhi'nin biri $350 değerinde netbook, diğeri $1400 değerinde masaüstü bilgisayarı var.

    - Masaüstüne sıvı dökme olasılığı: 1/7
    - Netbook'a sıvı dökme olasılığı: 1/5
      (Bu olasılıklar bağımsızdır.)

    Herhangi bir cihaz hasar alırsa tamamen değiştirilmesi gerekir.

    $200'lık bir sigorta, sıvı hasarı durumunda iki cihazdan birinin veya her ikisinin değişim masrafını karşılar.
    (Tüm kayıpları negatif olarak ele alın.)

    a. Sigortayı satın almanın beklenen parasal değeri nedir?

    b. Sigortayı almamanın beklenen parasal değeri nedir?

14. Diyelim ki her hafta 5 arkadaşınla poker oynuyorsun ama çok iyi değilsin.
    1 kez kazanıyorsan, 8 kez kaybediyorsun.
    Gerçek parayla oynamadığınız için bu çok da sorun değil.

    Ama gelecek hafta, herkesin $15 ortaya koyduğu gerçek bir oyun olacak.
    Kazanan tüm parayı alacak, diğerleri $15 kaybedecek.

    a. Bu oyunu oynamanın beklenen parasal değeri nedir?

    Şimdi, poker becerisini artırmayı öğreten bir kitap gördüğünü varsay.
    Kitap $30 ama kazanma ihtimalini artıracak.

    b. Bu kitabın, beklenen değeri pozitif yapmak için kazanma ihtimalini ne kadar artırması gerekir?

15. Diyelim ki yerel eczanende yeterince puan biriktirdin ve bunları $100 değerinde ürünle takas edebiliyorsun.

    Ama eczane sana ikinci bir seçenek sunuyor:
    Puanlarını, senin gibi aynı puanı biriktirmiş müşterilerin katıldığı bir çekilişe katılma hakkı ile takas edebilirsin.

    - Çekilişte sadece bir kişi kazanacak.
    - Ödül: $10.000 değerinde ürün.
    - Çekilişte toplam 300 kişi olacak (sen dahil).

    Çekilişi kaybetmek, –$100'lük bir kayıp olarak değerlendirilecek.

a. Çekilişe katılmanın beklenen parasal değeri nedir?

b. Bu çekilişin, puanlarını \$100'lık ürüne takas etmenle aynı değerde olması için kaç kişilik olması gerekir?
(Yani çekilişe katılan toplam kişi sayısı ne kadar az olmalı ki, bu değişim adil sayılabilsin?)

16. Şu oyunu düşün: Yazı tura 3 kereye kadar atılacak.

- İlk yazı ilk atışta gelirse: \$2 kazanırsın, oyun biter.
- İlk yazı ikinci atışta gelirse: \$40 kazanırsın, oyun biter.
- İlk yazı üçüncü atışta gelirse: \$800 kazanırsın, oyun biter.
- 3 atışta da hep tura gelirse: $\$x$ ceza ödersin.

Bu oyunun adil olması için x ne olmalıdır?

17. Şu oyunu düşün: Adil bir zar iki kez atılabilir.

- İlk atışta 1 gelirse, $\$x$ kazanırsın, oyun biter.
- Aksi halde zar bir kez daha atılır.
- İkinci atışta 2 gelirse, $\$6x$ kazanırsın, oyun biter.
- Aksi halde \$6 kaybedersin, oyun biter.

Bu oyunun adil olması için $\$x$ değeri ne olmalıdır?

18. Şu oyunu düşün:

Adil bir desteden kart çekeceğim.

- Eğer çekilen kart 2 ya da 3 ise, bana kartın değeri $\times \$x$ kadar ödeme yapacaksın:
- 2 gelirse: $\$2x$
- 3 gelirse: $\$3x$
- Eğer ilk kart ne 2 ne de 3 ise, ikinci bir kart çekiyorum:
- Eğer bu kart 7 ise, sen $\$7x$ kazanıyorsun ve oyun bitiyor.

- Eğer 7 gelmezse, bana \$1 ödüyorsun, oyun bitiyor.

Bu oyunun adil olması için x kaç olmalı?

19. Diyelim ki 3 tane küre kavanozu (torbası) var: A, B, ve C.
Her kavanozda toplam 100 adet küre var.
Bazıları siyah, geri kalanı beyaz.
Kaç tane siyah küre olduğunu bilmiyorsun ama şu iki şeyi biliyorsun:

    - B kavanozundaki siyah küre sayısı, A'nın iki katı.
    - C kavanozundaki siyah küre sayısı, B'nin iki katı.

    Aşağıdaki oyun için adil fiyat \$1 olarak belirlenmiş:

    - Rastgele bir kavanoz seçiyorum ve içinden rastgele bir küre çekiyorum.
    - Eğer siyah küre A kavanozundan çıkarsa: \$100 kazanırsın
    - Eğer siyah küre B kavanozundan çıkarsa: \$50 kazanırsın
    - Eğer siyah küre C kavanozundan çıkarsa: \$25 kazanırsın
    - Eğer beyaz küre çıkarsa: hiçbir şey kazanmazsın

    A kavanozunda kaç tane siyah küre vardır?

20. Bir yarışma programındasın. Karşında kapalı üç kapı var.
Bu kapılardan birinin arkasında büyük bir para ödülü var ama ne kadar olduğunu bilmiyorsun.
Diğer iki kapının arkasında hiçbir şey yok.

    İki seçeneğin var:

    - Seçenek A: Rastgele bir kapı seç ve arkasındakini al (bir şey varsa).
    - Seçenek B: Sunucudan içi boş olan kapılardan birini açmasını iste.
      Sonra kalan iki kapıdan rastgele birini seç ama bulduğun ödülün yalnızca yarısını alabilirsin.

    Hangi seçeneğin beklenen değeri daha yüksek? Cevabını gerekçelendir.

İpucu

Önce ödülün \$100 olduğunu varsayarak her seçeneğin beklenen değerini hesapla.
Sonra \$1000 için aynısını yap. Ardından bu durumu herhangi bir ödül miktarına nasıl genelleyebileceğini açıkla.

21. Bazı iş yerleri haftalık piyango düzenler.
Diyelim ki iş yerinizde 30 kişi var ve herkes her Pazartesi \$5 ödüyor.

    - Her hafta Cuma günü rastgele bir finalist seçiliyor (toplam 3 hafta boyunca).
    - Dördüncü Cuma günü, önceki 3 haftanın finalistleri arasından biri rastgele seçiliyor.
    - Seçilen finalist, tüm ödülü kazanıyor.

    Bu piyangoda yer almanın beklenen değeri nedir?
    Cevabının mantığını açıkla.

> **İpucu**
>
> Bu soruyu hiç hesaplama yapmadan çözmek mümkün.

22. Adil bir fiyat ödemenin her zaman sıfır beklenen değerle sonuçlandığını kanıtlayın.

23. Bir oyunda iki olası sonuç var:
Ya \$3 kazanırsın ya da \$10 kaybedersin.

    Eğer oyun adilse (yani beklenen parasal değeri sıfırsa), kazanma olasılığı ne olmalıdır?

24. Yazı tura atılıyor.

    - Yazı gelme olasılığı: p
    - Tura gelme olasılığı: $1 - p$

    İki seçenek var:

    - Seçenek A: Yazı gelirse \$20 kazan, tura gelirse \$10 kaybet.
    - Seçenek B: Yazı gelirse \$50 kazan, tura gelirse \$25 kaybet.

    A seçeneğinin beklenen değeri pozitif ve B'nin beklenen değerinin 2 katı olabilir mi?

25. Bir kumarda iki olası sonuç var:
Ya $\$x$ kazanırsın, ya da $\$2x$ kaybedersin. $(x > 0)$

    Aşağıdaki iki ifadeye bak:

    i. Eğer beklenen parasal değer sıfırsa, kazanma olasılığı, kaybetme olasılığının iki katıdır.

    ii. Eğer beklenen parasal değer sıfırsa, kazanma olasılığı 2/3'tür.

Her iki ifade de doğru mu, yoksa sadece biri mi?
Hangisi?

26. Bir oyunun üç olası sonucu var:

    - $1 kazanırsın
    - $2 kazanırsın
    - $3 kaybedersin

    Aşağıdaki iki ifadeye bak:

    i. Eğer tüm sonuçlar eşit olasılıktaysa, beklenen parasal değer $0'dır.

    ii. Eğer beklenen parasal değer $0'sa, o zaman tüm sonuçların olasılıkları eşittir.

    Her iki ifade de doğru mu, yoksa sadece biri mi?
    Hangisi?

Kaynaklar

Weisberg, Jonathan. 2025. *Odds & Ends*. Lisans: Açık Erişim. https://jonathanweisberg.org/vip/.