

# Koşullu Olasılık Nedir? | Basit ve Anlaşılır Açıklama

Çizgeler

22 Şubat 2025

<https://youtu.be/MYODIWsUCpg>

## Alıştırmalar

1. Sekiz yüzlü adil bir zarda 4'ten büyük bir sayı attığınıza göre çift sayı atmış olma olasılığınız kaçtır?
2.  $P(B) = 4/10$ ,  $P(A) = 7/10$  ve  $P(B \cap A) = 2/10$  olsun. Aşağıdaki olasılıklar kaçtır?
  - a.  $P(A | B)$
  - b.  $P(B | A)$
3.  $X$  şirketi tarafından üretilen tabletlerin %5'i kusurludur. Bu oran  $Y$  şirketinde ise %10'dur. Bir bilgisayar mağazası tabletlerinin %40'ını  $X$ 'ten, %60'ını  $Y$ 'den satın almaktadır.

Aşağıdaki soruları yanıtlamak için ağaç şeması çizin.

- a. Mağazadan rastgele seçilen bir tabletin  $X$  tarafından üretilmiş olma ve kusurlu olma olasılığı kaçtır?
  - b. Mağazadan rastgele seçilen bir tabletin kusurlu olma olasılığı kaçtır?
  - c. Bu mağazadan alınan bir tabletin kusurlu olduğu göz önüne alındığında,  $X$  tarafından üretilmiş olma olasılığı kaçtır?
4. Bir  $A$  şehrinin  $B$  mahallesinde çok sayıda kimyasal tesis bulunmaktadır.  $A$  şehrindeki çocukların %2'si  $B$  mahallesinde yaşamaktadır ve bu çocukların %14'ü toksik düzeyde kurşuna maruz kalmıştır. Şehrin geri kalan yerlerinde çocukların sadece %1'i toksik düzeyde kurşuna maruz kalmaktadır.

Aşağıdaki soruları yanıtlamak için bir ağaç şeması çiziniz.

- a. A şehrinden rastgele seçilen bir çocuğun B mahallesinde yaşıyor olması ve toksik düzeyde kurşuna maruz kalmış olma olasılığı kaçtır?
  - b. A şehrinden rastgele seçilen bir çocuğun toksik düzeyde kurşuna maruz kalmış olma olasılığı kaçtır?
  - c. A şehrinden rastgele seçilen ve toksik düzeyde kurşuna maruz kalmış bir çocuğun B mahallesinde yaşıyor olma olasılığı kaçtır?
5. 100 mahkumun ölüm cezasına çarptırıldığını varsayalım. Bunlardan 70'i A hücrelerinde, diğer 30'u ise B hücrelerinde kalmaktadır. A hücrendeki mahkumların 9'u masumdur. B hücrendeki mahkumlardan sadece 1'i masumdur.

Yasalara göre bir mahkumun affedilmesi gerekiyor. Şanslı mahkum, A veya B hücrelerinden seçilmek için adil bir yazı tura atılacaktır. Daha sonra seçilen hücreden rastgele bir mahkum seçmek için adil bir çekiliş yapılacaktır.

Affedilen mahkum masum ise A hücrelerinden olma olasılığı kaçtır?

Aşağıdaki sorulara yanıt vermek için bir ağaç şeması ve şu tanımlamaları kullanın:

$X$ : Affedilen mahkum masumdur.

$A$ : Affedilen mahkum A hücrelerinde.

$B$ : Affedilen mahkum B hücrelerinde.

- a.  $P(X | A) = ?$
  - b.  $P(A \cap X) = ?$
  - c.  $P(X | B) = ?$
  - d.  $P(B \cap X) = ?$
  - e.  $P(X) = ?$
  - f.  $P(A | X) = ?$
6.  $A$ ,  $B$  ve  $C$ 'nin bağımsız olduğunu ve her birinin olasılığının  $\frac{1}{3}$  olduğunu varsayalım.  $P(A \cap B \cap C)$  kaçtır?
7. Aşağıdaki durumlardan hangisi mümkün değildir? Cevabınızı gerekçelendiriniz. ( $B^c$ ,  $B$  olayının olumsuzudur.)
- a.  $P(A) = 1/2$ ,  $P(A | B) = 1/2$ ,  $P(B | A) = 1/2$ .
  - b.  $P(A) = 1/2$ ,  $P(A | B) = 1$ ,  $P(A | B^c) = 1/2$ .

8.  $A$  ve  $B$  birbirini dışlıyorsa (yani  $A \cap B = \emptyset$  ise)

$$P(A \cup B | C) = P(A | C) + P(B | C)$$

eşitliği doğru olabilir mi? Cevabınızı gerekçelendiriniz.

9. Bağımsızlığın simetrik olduğu önermesini ( $A, B$ 'den bağımsızsa,  $B$  de  $A$ 'dan bağımsızdır) gerekçelendiriniz.

### 💡 İpucu

$A$ 'nın  $B$ 'den bağımsız olduğunu varsayarak başlayın. Ardında  $P(A | B)$ 'yi yazın ve koşullu olasılığın tanımını uygulayın.

10. Elimizde 4 elma ve 10 kova olduğunu varsayalım. Her elmanın yerleşimi diğerlerinden bağımsız olacak şekilde her elmayı rastgele bir kovaya yerleştiriyoruz.  $E_{ij}$ ,  $i$ 'inci ve  $j$ 'inci elmaların aynı kovaya yerleştirildiği olayı olsun.

- $E_{12}, E_{34}$ 'ten bağımsız mıdır?
- $E_{12}, E_{23}$ 'ten bağımsız mıdır?
- Her  $E_{ij}$  olay çifti bağımsız mıdır?
- $E_{ij}$  olaylarının her üçlüsü bağımsız mıdır?

11.  $A$  mantıksal olarak  $B$ 'yi gerektiriyorsa  $P(B | A) = 1$  olduğunu kanıtlayın.

12. Aşağıdaki üç koşulun geçerli olduğunu varsayalım.

- $P(A) = P(A^c)$
- $P(B | A) = P(B | A^c)$
- $P(B) > 0$

O zaman

iv.  $P(A | B) = P(A | B^c) = \frac{1}{2}$

eşitlikleri doğru mudur? Evet ise iv.'nin geçerli olması gerektiğini kanıtlayın. Hayır ise, bir karşı örnek verin.

13.  $P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A)$  eşitliği her zaman geçerli midir? (Her iki koşullu olasılığın da iyi tanımlanmış olduğunu varsayın.)

14.  $P(A | B) = P(B^c | A^c)$  eşitliği, her iki koşullu olasılığın iyi tanımlanmış olması varsayımıyla, her zaman geçerli midir? Evetse, kanıtlayın. Hayırsa bir karşı örnek verin.

15. Bir kutuda 30 siyah ve 70 beyaz bilye olduğunu varsayalım. Rastgele 5 bilye çekiyoruz.  $A$ , ilk dört çekilişten 3'ünün siyah olduğu olayı olsun ve  $B$ , beşinci çekilişin siyah olduğu olayı olsun. Aşağıdaki ifadenin değerini bulun.

$$\frac{P(A | B)}{P(B | A)} \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$$

## Kaynaklar

Weisberg, Jonathan. 2025. *Odds & Ends*. Lisans: Açık Erişim. <https://jonathanweisberg.org/vip/>.